ISSN 2175-4195

OS *ALOGON:* uma história dos números irracionais

João Henrique Lorin (TIDE) – Unespar/Fecilcam, jhlorin@fecilcam.br
Veridiana Rezende (TIDE) – Unespar/Fecilcam, rezendeveridiana@gmail.com

RESUMO: Neste trabalho, buscamos descrever parte da trajetória histórica de um conceito presente em todos os níveis de ensino de matemática no Brasil - o de número irracional -, ou como diriam os gregos da época de Pitágoras, os *alogon*[1]. Apresentamos algumas das primeiras relações matemáticas envolvendo figuras geométricas, descobertas pelos povos egípcios e babilônios que, traduzidas para notações matemáticas atuais, apresentam aproximações de números irracionais. Na sequência, são explicitadas as dificuldades que os matemáticos gregos enfrentaram para assumirem a existência dos números irracionais, e como eles conseguiram superar a crise da descoberta desses números. Os povos da idade média e do renascimento também tiveram contato com esses números, e souberam lidar com tais situações. No entanto, foi somente no século XIX, especialmente com os matemáticos Cantor e Dedekind, que os números irracionais receberam o estatuto de número. Esses dois matemáticos elaboraram teorias distintas que garantiram a continuidade da reta numérica e permitiram operar com os números irracionais.

Palavras-chave: História da Matemática. Incomensurabilidade. Números Irracionais.

1 INTRODUÇÃO

Pesquisas vêm mostrando a dificuldade de alunos de diferentes níveis de ensino, inclusive do Ensino Superior, para a compreensão dos números irracionais (REZENDE (2013); FISCHBEIN (1995); SOARES (1999)). Uma maneira de procurar entender a não compreensão de certo conceito é justamente revisitar historicamente como outros estudiosos entendiam ou elaboraram tal conceito no decorrer da história. Este é o objetivo deste trabalho, mostrar um breve panorama histórico do conceito de número irracional, na tentativa de dar subsídios históricos e\ou epistemológicos para a construção de tal conceito.

Nas civilizações antigas do Egito e da Babilônia é possível encontrar indícios de tais números, entretanto, como ressalta Roque (2012), tomaremos o cuidado de não cometermos um anacronismo conferindo a essas civilizações uma estimativa do número π, por exemplo.

Na Grécia antiga, os pitagóricos na tentativa de responder um dos principais problemas que permeava as discussões dos pré-socráticos, o da origem das coisas, ou da

[1] [...] Pitágoras bateu em retirada de sua prática promissora de associar figuras geométricas a números, e proclamou que alguns comprimentos não podem ser expressos por número. Os pitagóricos chamaram tais comprimentos de *alogon*, “não racionais”, que hoje traduzimos como “irracional”. Todavia, a palavra *alogon* tinha um duplo sentido: significava também “não deve ser falado”. (MLODINOW, 2004, p. 37).

origem do universo, criam uma física fundamentada nos números inteiros e razão destes. Entretanto foi na tentativa de estabelecer uma correspondência entre números e formas geométricas que surge a palavra que deu origem ao título: “Os Alogon”. Posteriormente a esta suposta crise[2] na filosofia pitagórica outros matemáticos gregos, como Teeteto, Teodoro, Platão e Eudoxo tentam criar mecanismos de construir geometricamente medidas incomensuráveis.

Na Idade Média e no Renascimento, pouco se tem sobre avanços no tratamento dos números irracionais. Na Europa há um avanço do Império Romano sobre o domínio grego, e coincidentemente nesse período, os olhos dos historiadores da matemática se voltam para o oriente, principalmente para os árabes e hindus. Entretanto é na Idade Média é que se tem a junção dos conceitos de quantidade e medida feita pelos matemáticos árabes (ROQUE, 2012). No Renascimento, os números irracionais aparecem presentes em diversos momentos das matemáticas desenvolvidas, sobretudo nas soluções de equações algébricas.

Contudo, foi apenas no século XIX que os matemáticos, Cantor e Dedekind, elaboraram teorias matemáticas que garantissem a institucionalização desses números na Ciência, provando que os números reais foram um corpo ordenado, permitindo operar com esses números.

2 INDICATIVOS DE NÚMEROS IRRACIONAIS NAS ANTIGAS CIVILIZAÇÕES EGÍPCIA E BABILÔNICA.

Uma das primeiras civilizações que apresentam registros matemáticos é a civilização *egípcia*. Embora alguns registros desses povos tenham sido encontrados em tumbas, pedras e monumentos, as principais fontes de informações matemáticas que resistiram ao tempo foram os papiros, que datam de aproximadamente 2000 a. C. (BOYER, 1996). Segundo o referido pesquisador, nesses papiros, sobretudo no papiro de Rhind, são apresentados diversos problemas envolvendo operações aritméticas, frações unitárias, álgebra, razões trigonométricas e geometria.

De acordo com Boyer (1996), dentre os problemas apresentados no papiro de Rhind, dois problemas nos chamam atenção por apresentarem relações matemáticas que, traduzidas para a linguagem matemática atual, é possível notar uma aproximação de um número irracional particular – o número π. O problema 50, por exemplo, se refere a igualar a área de um campo circular de diâmetro 9 de unidades com a área de um quadrado de lado de 8 unidades. Ao resolver este problema com as notações matemática atuais:

[2] Caracterizada por Lorin (2009) no sentido dado por Tomas Kuhn em seu livro *A Estrutura das Revoluções Científicas.*

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8\times 8 \Leftrightarrow \pi\frac{81}{4} = 64 \Leftrightarrow \pi \cong 3{,}1604 .$$

Outra relação matemática utilizada pelos egípcios que perdura até os nossos dias e que, traduzida para a linguagem atual, está relacionada ao número π, diz respeito a considerar que a razão entre a área do círculo e o comprimento da circunferência era igual à área do quadrado circunscrito para o seu perímetro. Com notações atuais, a razão entre a área de uma circunferência de raio r e seu perímetro é $\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$, e a razão entre o quadrado circunscrito numa circunferência de raio r e seu perímetro é $\frac{4r^2}{8r} = \frac{r}{2}$.

No entanto, segundo Boyer (1996), não se pode afirmar que os egípcios reconheceram aproximações para π. O autor afirma que as contribuições da Matemática egípcia estão relacionadas a comparações geométricas, referentes a perímetros e áreas de círculos e quadrados, que atualmente relaciona-se ao número π.

Embora não é possível afirmar que os egípcios reconhecessem a existência de números irracionais (Roque, 2012; Boyer, 1996), consideramos ao menos curioso que a pirâmide de Quéops, um monumento que data de 2500 a. C., construída por esses povos, apresente aproximações que nos leva a perceber, com notações atuais, que ela é uma pirâmide áurea, satisfazendo $\frac{2\mathrm{h}}{a} = \sqrt{\varphi} = 1{,}272...$, sendo $\varphi = 1{,}618...$ o número de ouro, e h a altura da pirâmide de base quadrada de lado a (SARAIVA, 2002).

Indicativos de números irracionais também são constatados nos registros dos povos babilônios, que datam de aproximadamente 2100 a. C. e apresentam textos matemáticos com aproximações de alguns números irracionais, tais como $\sqrt{2}$ e π (ROQUE, 2012).

Segundo Aaboe (2002), encontra-se nos registros babilônios que a diagonal do quadrado poderia ser encontrada multiplicando o lado por $\sqrt{2}$. Decorrente desse fato, para Cousquer (1998), pode-se dizer que o resultado denominado por teorema de Pitágoras já era conhecido há mais de mil anos antes dos pitagóricos. Esse fato é ainda mais evidenciado pelos registros que garantem um alto grau de sofisticação da matemática babilônia relacionada ao teorema de Pitágoras, assim como apresenta o tablete *Plimpton* 322[3] quinze linhas com ternos pitagóricos, ou seja, valores de x, y e z que satisfazem $x^2 + y^2 = z^2$.

---

[3] “O nome indica que se trata de um tablete da coleção G.A. Plimpton da Universidade da Columbia, catalogada sob o número 322. O tablete foi escrito no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C) e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945”.

Os babilônios descobriram um método para o cálculo de raízes quadradas $\sqrt{A}$. Segundo Cousquer (1998), eles perceberam que tomando um valor aproximado *a* maior que $\sqrt{A}$, o valor $\frac{A}{a}$ é menor que $\sqrt{A}$, e considerando um valor aproximado *a* menor do que $\sqrt{A}$, o valor $\frac{A}{a}$ será maior que $\frac{A}{2}$. Assim, considerando:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right).$$

Eles esperavam obter uma melhor aproximação do que o valor aproximado *a*.

Com este algoritmo, pode-se construir uma sequência de valores que converge para o valor da raiz quadrada procurada e consiste em calcular os termos da sequência que satisfaz a relação:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right).$$

Sem demonstrações, os babilônios conheciam tais convergências e as utilizavam para o cálculo de raízes. Por exemplo, o cálculo de valores aproximados para $\sqrt{2}$ foi encontrada até a 4ª aproximação num dos tabletes dos babilônios (COUSQUER, 1998).

Além das aproximações para $\sqrt{2}$, existem registros que comprovam que os babilônios também apresentavam boa aproximação para π. De acordo com Boyer (1996), eles tomavam a razão entre o perímetro do hexágono regular e o perímetro da circunferência circunscrita neste hexágono como $0;57,36$, que em notações atuais significa: $\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = 0,96$. Assim, $\frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi} = 0,96 \Leftrightarrow \pi = 3,125$. Esta aproximação para π é tão boa quanto à encontrada pelos egípcios.

Podemos indicar, ainda, que os babilônios perceberam a existência de raízes quadradas de números que não são quadrados, perfeitos, ou seja, perceberam a existência de números que mais tarde, no século XIX, foram denominados por números irracionais. Esta afirmação é baseada no fato que por meio de descrição verbal, os babilônios resolviam as equações do segundo grau, pelo método que conhecemos hoje no Brasil por fórmula de Bhaskara[4]. Porém, o número existente na fórmula cuja raiz quadrada deveria ser calculada era sempre um quadrado perfeito (CAJORI, 2007; BOYER, 1996).

---

[4] Esse método para resolução de equações do segundo grau aparece oficialmente pela primeira vez no tratado do indiano Aryabhata, por volta do século V d. C. Porém, comentários sobre este tratado foram escritos por Bhaskara I, em 629, e por Brahmagupta, em 628. Os comentários sobre os procedimentos de resolução de equações do segundo grau realizados por Brahmagupta foram citados mais tarde por Bháskara II, autor de livros populares de aritmética e ágebra do século XII (ROQUE, 2012).

3 NÚMEROS IRRACIONAIS NA GRECIA ANTIGA: a descoberta dos *alogon* e o desenvolvimento de técnicas de construção de medidas incomensuráveis

Os pitagóricos desenvolveram várias nomenclaturas de números utilizadas ainda hoje, e basicamente desenvolviam sua aritmética usando pedrinhas. Porém, foi a tentativa de entender entes geométricos por meio de entes aritméticos, que muitos autores creditam a descoberta dos números irracionais aos pitagóricos. Entre os feitos creditados aos pitagóricos, está o Teorema de Pitágoras[5]. Este teorema que leva o nome do seu suposto "descobridor" foi utilizado por povos anteriores aos gregos do século V a. C., ou seja, o Teorema de Pitágoras já era conhecido e utilizado pelos babilônios, egípcios e chineses antes mesmo dos gregos. Porém a formalização deste resultado foi supostamente[6] feita pelos pitagóricos.

De acordo com Lorin (2009), o Teorema de Pitágoras causou um forte abalo nas explicações pitagóricas acerca da origem e natureza do Universo - o problema da *arché* - que permeou a filosofia dos pré-socráticos. O abalo começou com as tentativas de se determinar a medida da diagonal de um quadrado, utilizando dados aritméticos, decorrentes do Teorema de Pitágoras. Para determinar a medida da diagonal de um quadrado qualquer, os pitagóricos provavelmente, raciocinaram da seguinte maneira: Considere um quadrado qualquer, em particular, o quadrado ABCD representado na figura 1:

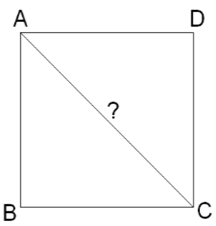

Figura 1 - quadrado ABCD

Traçando uma diagonal do quadrado, obtemos em particular, o triângulo ABC representado na figura 4:

[5] Para Roque (2012) os pitagóricos e as civilizações anteriores como os Egípcios e os Babilônicos, apenas utilizavam ternas pitagóricas, e que seria um anacronismo pensar que as civilizações antigas conheciam o que chamamos hoje de Teorema de Pitágoras em seu sentido pleno. Para estas civilizações este teorema era tratado apenas como um resultado aritmético e não geométrico.

[6] Para Roque (2012) a demonstração deste teorema foi em algum período entre os Pitagóricos e os matemáticos Platônicos.

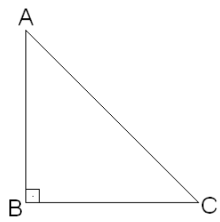

Figura 2 - triângulo retângulo ABC

Aplicando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo representado na figura 7, encontra-se:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 . \quad (1)$$

Mas, por hipótese, *ABCD* é um quadrado, assim:

$$\overline{AB} = \overline{BC} . \quad (2)$$

Logo, substituindo a equação (2) na equação (1), resulta:

$$2\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 . \quad (3)$$

Como, para os pitagóricos, os números se resumiam aos inteiros positivos e às razões entre eles, não foi possível encontrar um número que correspondesse exatamente à medida do comprimento $\overline{AC}$ e, portanto, não conseguiram estabelecer nenhuma relação entre a medida encontrada e a medida do lado do quadrado.

De fato, pois quando comparamos as medidas de dois segmentos, pode ocorrer que a medida de um deles seja um múltiplo inteiro da medida do outro, ou seja, dados dois segmentos de reta a e b, a medida de a está contida na medida de b um número *r* inteiro de vezes. Ou ainda, mesmo que não seja possível encontrar um múltiplo inteiro *b* de *a* tal que $b = r \cdot a$, podemos dividir o segmento a em p segmentos de medidas iguais a $\frac{a}{p}$ de modo que $b = \frac{l}{p} a$, ou seja, b seja l vezes o segmento $\frac{a}{p}$. Nestes dois casos dizemos (atualmente) que as medidas dos segmentos *a* e *b* são *comensuráveis*.

Como não ocorreu nenhuma das possibilidades acima, provavelmente os pitagóricos se questionaram: quais relações seriam estabelecidas entre esses segmentos? Qual o número que poderia ser atribuído a cada uma dessas medidas?

“Que fração poderia ser essa, uma vez que ela só poderia ser uma fração composta de verdadeiros números, dignos de reger o mundo, os inteiros?” (OMNÈS, 1996, p.29).

Para Lorin (2009), não é possível comprovar se os pitagóricos realizaram realmente alguma demonstração de que a medida encontrada da diagonal do quadrado não era uma razão de dois inteiros, porém fundado em alguns fragmentos deixados por pitagóricos após a morte de Pitágoras, podemos supor algumas formas de como eles tinham conseguido demonstrar tal feito, como sugeriu Omnès: “Ignoramos como ele procedeu no pormenor, mas as possibilidades não são muitas, e os testemunhos deixados pelos matemáticos que o seguiram pouco depois deixam poucas dúvidas a este respeito” (1996, p.30).

Como os pitagóricos trabalhavam apenas com medidas comensuráveis, é legítimo supor que, na tentativa de resolver o problema da medida da diagonal do quadrado, tomassem um número racional $r = \frac{m}{n}$ irredutível[7] tal que,

$$\overline{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overline{AB} \ . \tag{4}$$

Elevando-se ao quadrado os dois lados da equação (4), obtém-se:

$$\overline{AC}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \overline{AB}^2 . \tag{5}$$

Assim, das equações (3) e (5), conclui-se que:

$$2\overline{AB}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \overline{AB}^2 \Rightarrow 2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 . \tag{6}$$

Com as notações matemáticas atuais, a equação (6) é uma relação muito simples, mas para os pitagóricos nascia uma das mais temerosas “monstruosidades” que a escola enfrentaria. Com efeito, desenvolvendo a igualdade (6) tem-se:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow 2n^2 = m^2 \ . \tag{7}$$

Como m^2 é múltiplo de 2 segue que m^2 é par. Sendo m^2 par, o que se pode afirmar sobre m? m é par ou impar? Suponha que m seja impar. Deste modo $m = 2k+1$, assim:

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Fazendo $2k^2 + 2k = s$, temos que $m^2 = 2s + 1$, ou seja, m^2 é impar! Absurdo, pois contraria a hipótese inicial. Logo m é par! Mas se m é par ele pode ser escrito da seguinte forma, $m = 2k$, e, substituindo m em (7) obtemos:

$$2n^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow 2n^2 = 4k^2 \Leftrightarrow n^2 = 2k^2 \ . \tag{8}$$

Como nesta última equação, n^2 é par, consequentemente, n é par! Este fato causou espanto e surpresa para os pitagóricos, já que a razão $\frac{m}{n}$ é tomada como irredutível, e se m e n fossem números pares, seria possível dividir tanto o numerador

---

[7] Uma fração $\frac{a}{b}$ é dita irredutível, quando não é possível mais dividir (simplificar) o numerador e o denominador por um mesmo número. Neste caso dizemos também que *a* e *b* são primos entre si.

quanto o denominador da fração pelo número 2, contradizendo assim a irredutibilidade da razão.

Apesar de não ser possível determinar se realmente os pitagóricos realizaram as demonstrações da incomensurabilidade da diagonal do quadrado em relação a seu lado, por métodos aritméticos ou geométricos, o fato é que depois da descoberta desses segmentos - os incomensuráveis - a filosofia pitagórica não poderia mais ser sustentada.

Uma tentativa frustrada em tentar explicar a continuidade a partir do discreto foi apresentada por uma teoria denominada de teoria das mônadas[8]. Essa tentativa foi constantemente rebatida pelas escolas gregas que sucederam a dos pitagóricos, particularmente com a contradição lógica nos argumentos da escola pitagórica encontrada por *Zenão de Elea*, discípulo de *Parmênides.*

> Diz *Zenão*: como querem que a recta seja formada por corpúsculos materiais de extensão não nula? Isso vai contra a vossa afirmação fundamental de que *todas as coisas têm um número*. Com efeito, entre dois corpúsculos, 1 e 2, deve haver um espaço - se estivessem unidos, em que se distinguiam um do outro? - e esse espaço deve ser maior que as dimensões de um corpúsculo, visto que estas são as menores concebíveis; logo, entre dois posso intervalar um corpúsculo, 3, e fico com dois espaços: um entre 1 e 3, e outro entre 3 e 2, nas mesmas condições. Posso repetir o raciocínio indefinidamente e fico, portanto, com a possibilidade de meter entre 1 e 2 *quantos corpúsculos quiser*. - Qual é então o número que pertence ao seguimento que vai de 1 a 2? (CARAÇA, 1984, p. 77).

Zenão[9] objetivando mostrar aos matemáticos da época as incoerências decorrentes da tentativa de se completar grandezas contínuas com um número infinito de pequenas partículas apresentou alguns paradoxos, sustentados no seguinte argumento:

> [...] ou o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis ou existe um menor elemento indivisível de tempo (um instante) e de espaço (um ponto). Em dois de seus paradoxos, no da “Dicotomia” e no de “Aquiles e a Tartaruga”,

---

[8] [...] a recta, como toda figura geométrica, seria formada de mónadas postas ao lado umas das outras e, então, ao procurar a parte alíquota comum a dois segmentos, ela encontrar-se-ia sempre *quanto mais não fosse quando se chegasse, por subdivisões sucessivas, às dimensões da mónada* - se um segmento tivesse *m*, outro *n* vezes o comprimento da mónada, a razão dos comprimentos seria $\frac{m}{n}$. A descoberta da incomensurabilidade fazia estalar, como se vê, a teoria das mónadas e a conseqüente assimilação delas às unidades numéricas, e punha assim, em termos agudos, o problema da inteligibilidade do Universo (CARAÇA, 1984, p. 74).

[9] Em alguns livros ou traduções Zenão de Elea, aparece como Zenon de Elea.

Zenon argumenta que, se o tempo e o espaço são divisíveis "ad infinitum", o movimento é impossível (GALARDA *et al* ,1999, p. 20).

Após os pitagóricos terem se defrontado com as grandezas incomensuráveis e de suas tentativas em enquadrar em sua filosofia baseada no discreto serem contestadas por Zenão, a escola de Platão se ocupou, de certa forma, em tentar compreender essas medidas, inclusive, rivalizando com a escola de Eléa.

Os matemáticos Teodoro (465 a 398 a. C.), Teeteto (414 a 369 a. C.), Eudoxo (408 a 355 a. C.) e Euclides (360 a 295 a. C.) ligados à academia de Platão foram os que mais se destacaram em suas produções matemáticas. Na abordagem da escola platônica referente aos números irracionais e/ou às medidas incomensuráveis, há uma preocupação em desenvolver técnicas geométricas que permitissem, de alguma forma, "manejar matematicamente" as medidas incomensuráveis, pois "ninguém duvida da existência da diagonal do quadrado" (GODEFROY, 1997, p.50).

Os matemáticos platônicos, segundo Godefroy (1997), tiveram suas atividades científicas concentradas à produção de técnicas para a resolução de problemas de quadratura, ou seja, a construção de quadrados cuja área da superfície é igual à área de outra superfície de uma figura dada. Nessas técnicas eles utilizavam facilmente a $\sqrt{n}$ - raiz de n - para tal feito. Por exemplo, a construção geométrica de um segmento, de modo, que esse segmento seja o lado de um quadrado de área igual a 7 unidades quadradas. Este problema se resume em construir um segmento de medida igual a $\sqrt{7}$, e a técnica utilizada pelos matemáticos da escola platônica, para a resolução de tal problema, pode ser observada na seguinte figura:

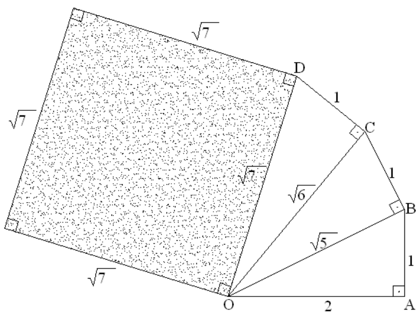

Figura 5 - a razão $\frac{OD}{AB} = \sqrt{7}$.

Fonte: Adaptado de Godefroy (1997, p. 51)

Além do desenvolvimento de técnicas para o tratamento envolvendo grandezas incomensuráveis, os seguidores de Platão discutiram, também, a demonstração de não comensurabilidade dessas medidas. No *Diálogos de Platão*[10], é relatada uma dessas discussões, entre Teeteto, Teodoro de Cirene e Sócrates, na qual, Teeteto, em seu diálogo com Sócrates, comenta que foi demonstrada a irracionalidade dos seguintes números:

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{15} \ e \ \sqrt{17}$$

> *Teeteto* - A respeito da algumas potências, Teodoro, aqui presente, mostrou que a de três pés e a de cinco, como comprimento não são comensurável com a de um pé. E assim foi estudando uma após a outra, até a de dezessete pés. Não sei por que parou aí (PLATÃO, 1988, p. 9).

De acordo com Struik (1992), atribui-se a Teeteto a teoria dos irracionais tais como apresentada no livro X de *Os Elementos de Euclides*:

> 1. Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensurável, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se.
> 2. Retas são comensuráveis em potência, quando os quadrados sobre elas sejam medidos pela mesma área, e incomensuráveis, quando para os quadrados sobre elas nenhuma área comum seja possível produzir-se. (EUCLIDES, 2009, p.353).

A discussão entre Teeteto e Sócrates encontrada no *Diálogos de Platão* aprofunda-se para além da comparação entre medidas comensuráveis e incomensuráveis, mas para as medidas que são incomensuráveis em comprimento, porém não o são em quadrado, como por exemplo, $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{11}$, e aquelas que são incomensuráveis mesmo em quadrado, por exemplo, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ou $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ (GALARDA *et al* ,1999).

> *Teeteto* - [...] ocorreu-nos, então, já que é infinito o número dessas potências, tentar reuni-las numa única, que serviria para designar todas. [...] Dividimos os números em duas classes: os que podem ser formados pela multiplicação de fatores iguais, representamo-los pela figura de um quadrado e os designamos pelos nomes de quadrado e de eqüilátero. [...] os que ficam entre estes, o três, por exemplo, e o cinco, e todos os que não se formam pela multiplicidade de fatores iguais, mas de uma multiplicação de um número maior por um menor, ou o inverso: a de um menor por um

[10] Platão 427-347 a.C. Teeteto-Crátilo. Trad. Carlos Alberto Nunes, 1988.

> maior, e que sempre são contidos em uma figura com um lado maior do que o outro, representamo-los sob a figura de um retângulo e os denominamos números retangulares.
> *Sócrates* - Ótimo! E depois?
> *Teeteto* - Todas as linhas que formam um quadrado de um número plano eqüilátero, definimos como longitude, e as de quadrado de fatores desiguais, potências ou raízes, por não serem comensuráveis com as outras pelo comprimento, mas apenas pelas superfícies que venham a formar. Com os sólidos procedemos do mesmo modo (PLATÃO, 1988, p. 9).

O matemático Eudoxo também ligado à academia de Platão e que dedicou a maioria de seus trabalhos na exploração do obstáculo da incomensurabilidade foi por um dos mais importantes matemáticos da Grécia Antiga. Seu nome hoje é comumente ligado a *teoria das proporções* a ao *método da exaustão*[11]. Essas duas teorias foram as que começaram a resolver, por meio de outro método, de outras leis gerais, de novos critérios, a crise levantada pela descoberta dos incomensuráveis.

Para contornar o problema, Eudoxo em vez de usar números para comparar duas grandezas de mesma espécie (dois comprimentos, duas áreas, dois volumes, etc.) adotou o conceito de “razão entre duas grandezas” e desenvolveu esta teoria de forma impecável (LIMA, 1991). As cinco primeiras definições do livro V de Euclides são:

> 1. Uma magnitude é uma parte de uma magnitude, a menor da maior, quando meça exatamente a maior.
> 2. E a maior é um múltiplo da menor, quando seja medida exatamente pela menor.
> 3. Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero.
> 4. Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra.
> 5. Magnitudes são ditas estrar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, seja iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes. (EUCLIDES, 2009, p.205).

[11] O termo “exaustão” aparece pela primeira vez em Grégoire de Saint - Vincent, em 1647 (STRUIK, 1992, p. 86).

Na definição 5, traduzindo para uma linguagem atual, Eudoxo afirma que: dado as grandezas a,b,c e d, segue que, se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, é necessário e suficiente afirmar que, tomando $\alpha,\beta \in Z$ tem-se: $\alpha \cdot a < \beta \cdot b \Rightarrow \alpha \cdot c < \beta \cdot d$, ou se $\alpha \cdot a = \beta \cdot b \Rightarrow \alpha \cdot c = \beta \cdot d$, ou ainda, se $\alpha \cdot a > \beta \cdot b \Rightarrow \alpha \cdot c > \beta \cdot d$.

Desse modo Eudoxo dá uma nova definição para a igualdade de razões, e diz, introduzindo um novo critério, quando uma razão é maior que a outra baseando-se apenas em números inteiros, incluindo tanto as razões racionais quanto as irracionais (AABOE, 2002). Assim, segundo Lintz (1999, p. 150) “com essa teoria das proporções, pode-se reabilitar a geometria, que se apresentava incompleta como deixada pelos pitagóricos [...]”

A teoria das proporções de Eudoxo pôde dar um novo significado para o *objeto matemático*: diagonal de um quadrado. Essa grandeza geométrica causava espanto e surpresa para os pitagóricos, como vimos na seção anterior, por não se adequar à crença de que tudo no universo deveria em última instância se resumir a números inteiros.

> A teoria das proporções de Eudoxo pôs de parte a teoria aritmética dos pitagóricos, que se aplicava apenas a quantidades comensuráveis. Era uma teoria puramente geométrica, que, na sua forma estritamente axiomática, tornava supérflua qualquer referência a grandezas comensuráveis ou incomensuráveis (STRUIK, 1992, p. 84).

O *método da exaustão*, também conhecido por *axioma de Arquimedes*[12]·, foi uma resposta da escola de Platão a Zenão, pois segundo Struik (1992), o método criado por Eudoxo: “[...] evitava as dificuldades dos infinitesimais renunciando simplesmente a eles, pela redução dos problemas que conduzem a infinitesimais a problemas que envolviam o uso da lógica formal” (STRUIK, 1992, p. 84). O método encontrado por Eudoxo, estabelecendo critério para a convergência de uma seqüência infinita, irá sustentar os mais importantes trabalhos dos matemáticos gregos subseqüentes.

A escola platônica, mais especificamente, Eudoxo, propõe o “novo”. De fato, o critério de convergência elaborado por Eudoxo aparece na proposição I do livro X dos Elementos de Euclides:

> Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta (EUCLIDES, 2009, p.354).

[12] Arquimedes faz referência explícita a Eudoxo quando utiliza este axioma.

Essa proposição serviu como preparação para que se pudesse dar uma definição para grandezas incomensuráveis, que é a proposição II do Livro X de Euclides:

> Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis. (EUCLIDES, 2009, p.355).

Transcrita em simbolismo moderno, a proposição I afirma que: Dado $A > \varepsilon$ então se $\alpha_i \leq \frac{1}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ então existe n tal que $A \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n < \varepsilon$. Ou, equivalentemente, se $\alpha_i \leq \frac{1}{2}$, então $\lim_{n \to \infty} (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 0$ (AABOE, 2002).

As técnicas desenvolvidas pelos platônicos, principalmente pela Teoria das Proporções e pelo Método da Exaustão, elaboradas por Eudoxo, são um dos pilares de uma nova tradição matemática que mais tarde é difundida nos Elementos de Euclides. Um dos matemáticos mais conhecidos no período pós-euclidiano foi Arquimedes, sua obra tinha um caráter mais voltado para a resolução de problemas e não parece ter sofrido influência do método axiomático que caracteriza os Elementos de Euclides. Em uma de suas obras Arquimedes apresenta um processo infinito para estabelecer limites para a razão entre comprimento de uma circunferência e o seu raio, isto é, para o que chamamos hoje de π (Roque, 2012).

4 NÚMEROS IRRACIONAIS NA IDADE MÉDIA

Vimos na seção anterior que com as técnicas desenvolvidas pelos matemáticos platônicos, foi possível construir uma quantidade significativa de medidas incomensuráveis. Outro ponto importante, é que na matemática difundida nos Elementos de Euclides existe a separação entre medida e quantidade, ou seja, entre número e grandeza, “Nos Elementos, o tratamento dos números (*arithmos*) é separado do tratamento das grandezas (*mégéthos*)” (ROQUE, 2002, p.188).

É comum encontrarmos nos livros de história da matemática que a idade média ficou conhecida como idade das trevas e não produziu avanço significativo na matemática, período este compreendido entre o avanço do império romano por volta do ano 44 a.E.C. até o Renascimento. Entretanto esta é uma visão eurocentrista, como indica Roque (2012), já que nesse período outros povos, também desenvolviam matemática. É exatamente na matemática produzida pelos árabes, mas especificamente em língua árabe, que aparece um tratamento até então inédito na matemática, a junção entre os conceitos de incomensurabilidade e irracionalidade.

> A álgebra dos árabes ultrapassou a divisão entre número e grandeza, que era constituinte da matemática euclidiana. Além da teoria das equações, eles criaram um cálculo algébrico sobre expressões polinomiais e estenderam as operações aritméticas a essas expressões, bem como a quantidades que os antigos não consideravam números, caso dos irracionais (ROQUE, 2012, p. 249).

A matemática produzida pelos árabes teve influência tanto de matemáticos gregos quanto de matemáticos hindus, talvez seja esta dupla influência que produziu a tradição árabe de se tratar a álgebra tanto por uma visão geométrica dos gregos, quanto por uma visão aritmética dos hindus.

> Muitas traduções árabes de trabalhos hindus e gregos são as únicas cópias hoje conhecidas.
> A álgebra arábica proveio da álgebra dos hindus e gregos. Os árabes tratavam a álgebra numericamente, como os hindus, e geometricamente como os gregos (BAUMGART, 1992, p. 76).

Esta influência desses dois povos, hindus e gregos, na álgebra produzida pelos árabes também pode ser a resposta para notação utilizada hoje que chamamos de raiz quadrada e aparece na obra de matemático árabe chamado Abu Kamil no ano 900 E.C.

> Kamil usadva termos “quadrado” e “raiz”. Os gregos concebiam o 5 como o lado de um quadrado de área 25; os árabes, seguindo os hindus, concebu=iam o 25 como uma árvore que crescia a partir do número 5, sua raiz. Os dois conceitos aparecem em “raiz quadrada”. A palavra latina para “raiz” é *radix*; daí nossa palavra “radical” (BAUMGART, 1992, p. 78).

Por volta do ano 1200 E.C. o matemático italiano Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci deu uma contribuição específica sobre o número de ouro, que é um número irracional, em um dos seus problemas mais famosos, o problema dos coelhos publicado em seu livro *Liber Abaci*. Assim como Fibonacci, outro matemático desse período que estudou o número de ouro foi o Pintor e Matemático Luca Pacioli.

5 NÚMEROS IRRACIONAIS NO RENASCIMENTO (período entre séculos XIII e XVII)

No Renascimento, diversas teorias matemáticas se desenvolveram, sobretudo nas áreas de álgebra, geometrias, matemática aplicada. Neste período, a Matemática também estava relacionada à arte. No que diz respeito aos números irracionais, é possível notar a presença desses números nas matemáticas do Renascimento. Números irracionais, por exemplo, apareciam nas soluções de equações cúbicas determinadas por Cardano (1501 - 1576), na aproximação para o número π atribuída por Viète (1540 - 1603), Kepler (1571 - 1630) utilizou o número π para determinar a fórmula $\pi(a+b)$, que representa o perímetro de uma elipse de semi - eixos a e b (BOYER, 1996; EVES, 1990).

Segundo Roque (2012), Viète baseia-se na álgebra para resolver problemas geométricos já resolvidos pelos gregos. O problema da trissecção de ângulos, por exemplo, poderia ser resolvido envolvendo uma equação do terceiro grau, que está relacionado a números irracionais. Para a autora, [...] o objetivo de Viète era mostrar que a álgebra podia ser útil aos problemas de construção que tinham ocupado os gregos, uma vez que pretendia fundar uma nova álgebra com o mesmo prestígio da geometria (p. 299).

Assim, embora não existiram avanços em termos de teorias consistentes que garantissem a existência dos números irracionais, durante o renascimento pode-se dizer que esses números estavam sempre presentes nas matemáticas desenvolvidas nesse período.

6 O SÉCULO XIX E A INSTITUCIONALIZAÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

O século XIX é marcado pelo rigor matemático, o florescimento da geometria, aritmetização da análise, processos infinitos, álgebras entre outros. Segundo Boyer (1996), este é considerado o século de ouro da Matemática. Em relação aos números irracionais, não foi diferente. Foi nesse século que o conceito de números irracionais ganhou o estatuto de número, possibilitando realizar operações com esses números, e garantindo, com esses números, a continuidade da reta numérica.

Vários matemáticos desse período ofereceram contribuições para a institucionalização do conceito de números irracionais. No entanto, no presente trabalho, optamos por descrever as contribuições dos matemáticos Cantor e Dedekind.

6.1 A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS POR RICHARD DEDEKIND (1831 - 1916)

Diante das lacunas existentes no domínio dos números racionais, Dedekind ressalta a necessidade da criação de novos números, de modo a completar os números racionais e atingir a completude da reta numérica. Assim, fundamentado na descoberta da incomensurabilidade pelos gregos, Dedekind (2008) tomando como exemplo os segmentos incomensuráveis diagonal e lado de um quadrado, o pesquisador afirma:

> Ao transportar tal medida sobre a reta, a partir do ponto *O*, obtemos uma extremidade que não corresponde a nenhum número racional. Igualmente, podemos demonstrar que existe uma infinidade de segmentos incomensuráveis com a unidade, permitindo afirmar: a reta *L* é infinitamente mais rica em elementos pontuais que o domínio *R* dos números racionais em elementos numéricos (DEDEKIND, 2008, p. 69, tradução nossa).

Para completar o domínio dos números racionais *R* para os reais, Dedekind (2008) introduz o conceito de Cortes. Cada Corte está relacionado a duas classes A_1 e A_2 de números racionais, denominado por (A_1, A_2). O pesquisador alerta que todo número racional *a* divide o sistema *R* em duas classes A_1 e A_2, de modo que todo número a_1 da primeira classe A_1 é menor do que todo número a_2 da segunda classe A_2. Existem, necessariamente, dois tipos de Cortes:

i. Dado número *a,* ou *a* é o maior número da classe A_1 ou *a* é o menor número da classe A_2, e, neste caso, *a* é um número racional. E, inversamente, se um corte (A_1, A_2) possui esta propriedade, na qual a classe A_1 possui maior elemento ou a classe A_2 possui menor elemento, então o corte (A_1, A_2) define um número racional.
ii. Cortes em que nem a classe A_1 possui maior elemento nem a classe A_2 possui menor elemento.

Pode-se citar como exemplo para o segundo caso o Corte definido pelo número $\sqrt{D}$, sendo D um número inteiro positivo que não é quadrado perfeito. Assim,

> Os Cortes que não são operados por números racionais possuem a propriedade referente à incompletude ou descontinuidade do domínio *R* dos números racionais. Cada vez que estamos na presença de um Corte (A_1, A_2) não operado por um número racional, nós criamos um novo número α correspondente a este Corte; dizemos que o número α corresponde a este Corte ou que ele opera este Corte. De agora em diante, todo Corte determinado corresponde a um e somente um número, racional ou irracional, e consideramos dois números como diferentes ou desiguais se e somente se eles correspondem a dois Cortes essencialmente distintos (DEDEKIND, 2008, p. 77, tradução nossa).

Desse modo, garantindo a existência dos números irracionais por meio de cortes, Dedekind garante a completude da reta numérica. E ainda, para garantir o estatuto de número para os irracionais, possibilitando realizar operações com esses números, Dedekind (1998) define, também por meio de Cortes, uma relação de ordem no conjunto dos números reais, continuidade do conjunto dos números reais, cálculos sobre os números reais e análise infinitesimal.

6.2 A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS POR GEORG CANTOR (1845 – 1918)

Assim como Dedekind e na mesma época, porém com uma abordagem completamente diferente, Geog Cantor oferece suas valiosas contribuições para a construção dos números irracionais, por meio de sequências de Cauchy[13], garantindo a existência do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo. Permitindo, tal como na teoria de Dedekind, operar com os números reais.

Ávila (2006) chama atenção para o fato que existem tantas sequências de Cauchy quanto são os números racionais, pois, para qualquer número racional *r* basta tomar a sequência constante $r_n = (r, r, r, \ldots)$ que é de Cauchy. Este mesmo autor ressalta que dentre as sequências de Cauchy, algumas são convergentes no conjunto dos números racionais, e outras sequências, tais como a sequência das aproximações por falta de $\sqrt{2}$, $r_n = (1;1,4;1,41;1,4142;\ldots)$, não convergem para um número racional.

Notando a necessidade de construir novos números – os irracionais –, sendo os limites das sequências de Cauchy que não convergem para números racionais, Cantor elabora sua teoria para mostrar como esses novos números unidos com os racionais formam um corpo ordenado completo – o conjunto dos números reais.

Segundo Cousquer (1998), Cantor publica em 1872 o artigo intitulado *Extensão de um teorema da teoria das séries trigonométricas*, no qual explica a necessidade de diferenciar a classe *A* dos números racionais com a classe *B* das sequências de números racionais e, em seguida, a classe *C* obtida pelos limites das sequências de elementos das classes *B* e *C*, e, ainda, todas as classes *C* obtidas a partir das classes precedentes. Este fato está explicitado numa passagem do mencionado artigo:

---

[13] Uma sequência (x_n) de números reais é denominada sequência de Cauchy quando cumpre a seguinte condição: Dado $\varepsilon > 0$ pode-se obter $n_0 \in N$ tal que se $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

> A classe *A* proporciona o nascimento da classe *B*; pelo mesmo processo, essas duas classes reunidas proporcionam o nascimento de uma nova classe *C*. Seja, com efeito, uma série infinita: $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ de números escolhidos nas classes *A* e *B*, de modo que não pertencem todos os números à classe *A*, e esta série sendo constituída tal que $b_{n+m} - b_n$ se torne infinitamente pequeno à medida que *n* cresce, para qualquer que seja *m*... Eu diria que esta série tem um limite determinado *c*. As grandezas numéricas *c* constituem a classe *C*. As definições de equivalência, de desigualdade e aquelas das operações elementares, sejam as grandezas *c*, sejam entre estas grandezas elas mesmas e aquelas das classes *A* e *B*, são análogas às definições dadas acima. Enquanto que as classes *B* e *A* são tais que se pode igualar cada *a* a um *b*, mas não cada *b* a um *a*, pode-se igualar não somente cada *b* a um *c*, mas também cada *c* a um *b*. Ainda que as classes *B* e *C* possam em certa medida ser identificadas, é essencial, na teoria que eu apresento, manter a distinção abstrata entre as classes *B* e *C*; também a equivalência de duas grandezas numéricas b, b' da classe *B* não significa a identidade, mas exprime somente uma relação determinada entre as séries às quais eles se relacionam. A classe *C* e aquelas que a precedem produzem de maneira análoga uma classe *D*; estas produzem uma classe *E*, e assim por diante; por λ operações (considerando aquela que passa de *A* para *B* como a primeira), chegamos a uma classe *L* de grandezas numéricas... (CANTOR, 1872 *apud* COUSQUER, 1998, p. 205 – 206, tradução nossa).

Essa construção dos números reais por meio de sequências de Cauchy identifica cada número racional *r* com a classe que contém a sequência constante $r_n = r$. As classes que não correspondem a esta identificação estão relacionadas aos novos números *- os irracionais*. É o caso da classe que contém a sequência $r_n = (1;1,4;1,41;1,4142;\ldots)$ que define $\sqrt{2}$ (ÁVILA, 2006).

Em 1873, Cantor mostra que o conjunto dos números racionais é enumerável, isto é, existe uma bijeção $f : N \to Q$ entre o conjunto dos números naturais com o conjunto dos números racionais e, neste caso, diz-se que estes dois conjuntos têm a mesma cardinalidade. Igualmente, Cantor prova que o conjunto dos números algébricos, que é o conjunto das raízes dos polinômios com coeficientes inteiros, também é enumerável, concluindo, portanto, que o conjunto dos irracionais algébricos, ou seja, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\ldots$, é enumerável e possuem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. No entanto, em relação ao conjunto dos números reais, Cantor prova que não é possível exibir uma bijeção com o conjunto dos números naturais. Para isto, o pesquisador realiza uma demonstração por absurdo provando que o conjunto dos números reais é não enumerável. Desse modo, considerando que a união de conjuntos enumeráveis é enumerável, e que o conjunto os números reais é a união dos números algébricos com os números transcendentes (tal como os números π e e), deduz-se que os números transcendentes não são enumeráveis, ou seja, sua cardinalidade[14] é maior que a do conjunto dos números naturais.

7 CONSIDERAÇÕES

A breve trajetória histórica da construção dos números irracionais, apresentada neste trabalho, mostra os conflitos que existiram durante a descoberta destes números, e o longo período que levou para que os irracionais fossem reconhecidos como números.

Embora não seja possível afirmar que os egípcios e babilônios reconheceram a existência de números irracionais, seus registros matemáticos apresentam relações matemáticas que, com notações atuais, estão relacionadas a números irracionais particulares tal como os números $\pi, \sqrt{2}$ e ϕ.

No entanto, de acordo com os resultados apresentados no decorrer desse texto, podemos dizer que a descoberta dos números irracionais deve-se a matemáticos gregos, que viveram entre os séculos V e III a. C. Os pitagóricos vivenciaram a chamada crise dos incomensuráveis, ao perceberem que não existe medida comum entre o lado e a diagonal de um quadrado. Já os platônicos aceitaram tais medidas, afinal tais medidas existiam. No entanto, foi o grego Eudoxo que com o método de exaustão e a teoria das proporções que permitiu comparar medidas incomensuráveis. Segundo Rezende (2013), este fato marcou um avanço para o conceito de irracionalidade, pois, além dos gregos provarem sobre a existência de segmentos incomensuráveis, eles podiam representá-los e, sobretudo, compará-los por meio da teoria de Eudoxo, passando a aceitá-los como um objeto geométrico.

Embora os povos da idade média e da renascença se depararam com esses números em suas matemáticas, foi somente no século XIX que os números irracionais recebe o estatuto de número (REZENDE, 2013). Matemáticos do século XIX, dentre eles Cantor e Dedekind, elaboraram teorias que garantiram a continuidade da reta numérica, acrescentando os números irracionais aos números racionais na reta. Esses matemáticos ainda garantiram em suas teorias a possibilidade de realizar operações matemáticas, institucionalizando os números irracionais como número.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática.** 2ª Ed. Trad. João B. P. de Carvalho. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2002.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. Editora Edgard Blücher Ltda., 2001.

---

[14] Quantidade de elementos de um conjunto.

BAUMGART, John K. História da Álgebra. In: BAUMGART, John K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:** Álgebra. Trad.: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Livraria Sá Costa, 1984.

COUSQUER, Eliane. **La fabuleuse Histoire des Nombres**. Diderot Editeur, Arts et Sciences, 1998.

DEDEKIND, Richard. **La création des nombres.** Librairie Philosophique J. VRIN, 2008.

EUCLIDES, **Os elementos.** Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FISCHBEIN, Efraim, JEHIAN, Ruth, COHEN, Dorit. The concept of irrational number in High-School Students and Prospective Teachers. **Educational Studies in Mathematics**. pp. 29 a 44, 1995.

FRANCO, V. S.; GERÔNIMO, J. R. **Geometria plana e espacial:** um estudo axiomático. Maringá: Ed. Massoni, 2005.

GALARDA, L. J., et al, **A evolução do Cálculo Através da História.** Vitória: Editora da Universidade Estadual do Espírito Santo - EDUFES, 1999.

GODEFROY, Gilles. **A Aventura dos Números.** Trad. Antônio Viegas. Lisboa - Portugal: Instituto Piaget, 1997.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria:** Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 1991.

LINTZ, R. G. **História da Matemática.** Blumenau: Ed. da FURB, 1999.

LORIN, João Henrique. **Uma Revolução Científica na Matemática: do Paradigma Pitagórico ao Paradigma Euclidiano.** Dissertação (Mestrado). PCM, Universidade Estadual de Maringá, 2009.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides:** a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Trad. de Enésio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

OMNÈS, R. **Filosofia da ciência contemporânea.** Trad. Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora Unesp, 1996.

PLATÃO, 427-347 a.C. **Diálogos: Teeteto e Crátilo.** Trad. do grego Carlos Alberto Nunes. Belém: Universidade Federal do Pará, 1988.

SARAIVA, José Cloves Verde. As pirâmides do Egito e a razão áurea. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, p. 03 – 06, nº 48, 2002.

REZENDE, Veridiana. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino**. Tese de doutorado. PCM, Universidade Estadual de Maringá, 2013.

SOARES, Eliane Faria; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plínio Cavalcati. Números Reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. **Revista Zetetikè,** v. 7, n. 12, pp. 95 – 117, 1999.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas.** 2° ed. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradativa Publicações Ltda, 1992.