ISSN 2175-4195

Dedução da Fórmula de Binet por meio Autovalores e Autovetores

Oilson Alberto Gonzatto Junior – Unespar / Fecilcam, oilson.agjr@gmail.com
Gislaine Aparecida Periçaro (Or) – Unespar / Fecilcam, gpericaro@gmail.com
Elaine Cristina Sturion – Unespar / Fecilcam, elaine.sturion@gmail.com
Solange Regina dos Santos (Or) – Unespar / Fecilcam, solaregina@gmail.com

Resumo: Este texto propõe a divulgação de um conhecido método para a determinação dos termos de uma Relação de Recorrência Linear por meio de conceitos inerentes à Álgebra Linear. Uma Relação de Recorrência Linear pode ser entendida como uma sequência de valores onde os termos posteriores dependem de um, ou mais, termos anteriores. Um clássico exemplo deste tipo de relação é a Sequência de Fibonacci, alvo deste trabalho, cujos termos são determinados de um modo recorrente definido da seguinte forma: Seja $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, para qualquer inteiro $k \geq 1$, tem-se $x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$. Um modo prático para determinar o n-ésimo termo desta sequência consiste na utilização da conhecida Fórmula de Binet. A dedução deste modelo deriva, inicialmente, da possibilidade de expressar a recorrência de Fibonacci como uma equação matricial, pois se tivermos $\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n + x_{n-1} \\ x_n & = & x_n \end{cases}$, para qualquer inteiro $n \geq 1$, então é possível representar este sistema de forma matricial, cujo vetor solução é da forma $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n + x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$. E então, desde que a matriz A tenha autovalores distintos (e ela têm), ela poderá ser diagonalizada e, portanto, iterada de modo mais eficiente. Os autovalores da matriz A são dados por $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, cujos autovetores associados são $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ respectivamente. Disto, segue que a solução da relação de recorrência é da forma $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, para algum par de escalares c_1 e c_2. Ao utilizar as condições iniciais definidas, isto é, $x_0 = c_1\lambda_1^0 + c_2\lambda_2^0 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$ e $x_1 = c_1\lambda_1^1 + c_2\lambda_2^1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$ é possível resolver o sistema para c_1 e c_2, onde são obtidos $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e, por fim tem-se uma fórmula explícita para determinar o n-ésimo termo da Sequência de Fibonacci, a Fórmula de Binet, que é dada por $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Palavras-chave: Relações de Recorrência. Autovalores e Autovetores. Fórmula de Binet.